数理解析研究所講究録 第2091巻 2018年 140-147

Asymptotic concentration probabilities of MLEs for a oTEF

筑波大学　赤平昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1　はじめに

パレート (Pareto) 分布はファイナンス，物理学，水文学，地質学，天文学等の分野でよく用いられ，その性質も研究されていて (Johnson et al. [JKB94], Arnold [Ar15], Vancak et al. [VGBB15])，それを含む片側切断指数型分布族 (one-sided truncated exponential family of distributions，略して oTEF) は有用である．いま，切断母数 γ と自然母数 θ をもつ oTEF $\mathcal{P}$ の分布から得られた大きさ n の無作為標本に基づいて，γ を局外母数として θ の推定問題を考える．従来，γ が既知のときの θ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator，略して MLE) $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ と最大条件付き尤度推定量 (maximum conditional likelihood estimator，略して MCLE) $\hat{\theta}_{MCL}$ は同じ漸近正規分布をもつことが知られ，その意味ではそれらの推定量は 1 次の漸近的同等性をもつ (Bar-Lev [BL84])．しかし，γ が既知のときは，γ に関する情報はすべて与えられているので，γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ は $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ より何らかの意味で劣っているはずで，さらに漸近的に高次の次数までの解析によって，その差異の解明が望まれた．最近，それらの推定量を偏り補正した後で，それらの確率展開に基づいて 2 次の漸近分散を求めて比較すると $\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ よりは良くないことが分かった (Akahira [A16], [A17], [A18])．

本稿では，oTEF $\mathcal{P}$ において，γ を局外母数として自然母数 θ の推定問題を考える．そして $\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ の分布の Edgeworth 展開を用いて，それらの比較をもっと精密に真の母数 θ の周りでの集中確率を 3 次の次数，すなわち n^{-1} の次数まで漸近的に比較し，その差異の構造を把握する．結果的には，その差異は 2 次の漸近分散の差の形に帰着され得ることが分かる．

2　片側切断指数型分布族 $\mathcal{P}$

まず，$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} a(x)e^{\theta u(x)}/b(\theta,\gamma) & (c < \gamma \le x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.1}$$

をもつ片側切断指数型分布族 (oTEF) $\mathcal{P}$ の分布に従う確率変数列とする．ただし，$-\infty \le c < d \le \infty$ とし，$a(\cdot)$ は非負値で，ほとんど至るところ連続で，$u(\cdot)$ は区間

(γ, d) 上で絶対連続で $du(x)/dx \not\equiv 0$ とする．また，$\gamma \in (c, d)$ について

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \;\middle|\; 0 < b(\theta, \gamma) := \int_\gamma^d a(x) e^{\theta u(x)} dx < \infty \right\}$$

とし，任意の $\gamma \in (c, d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間であると仮定する．なお，密度 (2.1) をもつ oTEF を厳密には下側切断 (lower-truncated) 指数型分布族とも言う．上記の $\mathcal{P}$ について，切断母数 γ を局外母数として自然母数 θ の最尤推定が行われ，γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}^\gamma_{ML}$，γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ と MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ が同じ漸近正規分布をもつことが示された ([BL84])．最近，偏り補正後にはそれらの 2 次の漸近分散を比較して，$\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は同じ 2 次の漸近分散をもつが，$\hat{\theta}^\gamma_{ML}$ の 2 次の漸近分散より小さくはならないことが示され，その差異も具体的に求められた ([A16], [A17], [A18])．本稿では，上記の設定の下で γ を局外母数として，θ の推定量 $\hat{\theta}^\gamma_{ML}$ と $\hat{\theta}_{ML}$ の確率展開に基づいて，それらの分布の Edgeworth 展開を求め，それらの集中確率を漸近的に 3 次の次数，すなわち n^{-1} の次数で比較し，その差異の構造を探る．

いま，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ とし，その順序統計量を $X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$ とする．また，$\mathcal{P}$ において $\log b(\theta, \gamma)$ は θ の狭義凸関数で，θ について無限回偏微分可能であり，各 $j = 1, 2, \ldots$ について

$$\lambda_j(\theta, \gamma) := \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} \log b(\theta, \gamma)$$

は $u(X_1)$ の j 次のキュムラントになる．

3　$\mathcal{P}$ において γ が既知のときの θ の MLE の 3 次の漸近分布

まず，$\gamma \le x_{(1)} := \min_{1 \le i \le n} x_i$，$x_{(n)} := \max_{1 \le i \le n} x_i < d$ となる $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，θ の尤度関数は

$$L^\gamma(\theta; \boldsymbol{x}) := \frac{1}{b^n(\theta, \gamma)} \left\{ \prod_{i=1}^n a(x_i) \right\} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n u(x_i) \right\}$$

になる．ここで，γ が既知のときには密度 (2.1) をもつ oTEF は正則な指数型分布族であることに注意．このとき，θ の尤度方程式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(x_i) - \lambda_1(\theta, \gamma) = 0$$

の解は一意的で，それを $\hat{\theta}^\gamma_{ML}(\boldsymbol{x})$ とすれば，$\hat{\theta}^\gamma_{ML} = \hat{\theta}^\gamma_{ML}(\boldsymbol{X})$ が θ の MLE になる (Barndorff-Nielsen [BN78], [BL84])．ここで，$\lambda_i = \lambda_i(\theta, \gamma)$ $(i = 2, 3, 4)$ とし

$$Z_1 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}} \sum_{i=1}^n \{u(X_i) - \lambda_1\}, \quad U_\gamma := \sqrt{\lambda_2 n} \left(\hat{\theta}^\gamma_{ML} - \theta \right)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([A16], [A17])．

定理 3.1 片側切断指数型分布族 (oTEF) $\mathcal{P}$ において，γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ について U_γ の確率展開は

$$U_\gamma = Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} Z_1^2 + \frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2}\right) Z_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

である．また，U_γ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$\begin{aligned}
E_\theta(U_\gamma) &= -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) =: \frac{1}{\sqrt{n}}\mu(\theta,\gamma) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\
V_\theta(U_\gamma) &= 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) =: 1 + \frac{1}{n}\tau(\theta,\gamma) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

である．

さらに，U_γ の 3 次の漸近キュムラント $\kappa_{3,\theta}(U_\gamma)$，4 次の漸近キュムラント $\kappa_{4,\theta}(U_\gamma)$ を求める．

定理 3.2 定理 3.1 と同じ設定の下で，U_γ の 3 次，4 次の漸近キュムラントは，それぞれ

$$\begin{aligned}
\kappa_3(U_\gamma) = E_\theta\left[\{U_\gamma - E_\theta(U_\gamma)\}^3\right] &= -\frac{2\lambda_3}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\
&=: \frac{1}{\sqrt{n}}\beta_3(\theta,\gamma) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \\
\kappa_4(U_\gamma) = E_\theta\left[\{U_\gamma - E_\theta(U_\gamma)\}^4\right] - 3\{V_\theta(U_\gamma)\}^2 &= \frac{1}{n}\left(\frac{12\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{3\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\
&=: \frac{1}{n}\beta_4(\theta,\gamma) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

である．

このとき，定理 3.1，定理 3.2 より $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ の分布の Edgeworth 展開は

$$\begin{aligned}
P_\theta\left\{\sqrt{\lambda_2 n}\left(\hat{\theta}^{\gamma}_{ML} - \theta\right) \le t\right\} =& P_\theta\{U_\gamma \le t\} \\
=& \Phi(t) - \frac{\mu}{\sqrt{n}}\phi(t) - \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(t^2-1)\phi(t) - \frac{\beta_4}{24n}(t^3-3t)\phi(t) \\
& - \frac{\beta_3^2}{72n}(t^5 - 10t^3 + 15t)\phi(t) - \frac{1}{2n}(\tau+\mu^2)t\phi(t) \\
& - \frac{\beta_3\mu}{6n}t(t^2-3)\phi(t) + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

になる (Kendall and Stuart [KS69], Bhattacharya and Ghosh [BG78], Akahira [A81])．ただし，$\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ をそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ の密度関数，累積分布関数とし，$\mu=\mu(\theta,\gamma)$, $\beta_i=\beta_i(\theta,\gamma)$ $(i=3,4)$, $\tau=\tau(\theta,\gamma)$ とする．

4　$\mathcal{P}$ において γ が未知のときの θ の MLE の 3 次の漸近分布

まず，$\gamma \leq x_{(1)}$，$x_{(n)} < d$ となる $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，(θ, γ) の尤度関数は

$$L(\theta, \gamma; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{b^n(\theta, \gamma)} \left\{ \prod_{i=1}^{n} a(x_i) \right\} \exp\left\{ \theta \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \right\} \tag{4.1}$$

になる．ここで，θ, γ のそれぞれの MLE を $\hat{\theta}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML}$ とすれば，(4.1) から $\hat{\gamma}_{ML} = X_{(1)}$ になり，$L(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}; \boldsymbol{X}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, X_{(1)}; \boldsymbol{X})$ になるので，$\hat{\theta}_{ML}$ は尤度方程式を満たす，すなわち

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(X_i) - \lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}) = 0$$

になる．また，$T := n(X_{(1)} - \gamma)$ とする．このとき，次のことを得る ([A16], [A17])．

定理 4.1　片側切断指数型分布族 (oTEF) $\mathcal{P}$ において，γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と同じ 2 次の漸近的偏りをもつように補正した MLE を

$$\hat{\theta}_{ML^*} := \hat{\theta}_{ML} + \frac{1}{k(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})\lambda_2(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})n} \left\{ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \left(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)} \right) \right\},$$

とする．ただし，$k(\theta, \gamma) := a(\gamma)e^{\theta u(\gamma)}/b(\theta, \gamma)$ とする．このとき，$\hat{U}^* := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML^*} - \theta)$ の確率展開は

$$\begin{aligned} \hat{U}^* = & Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} Z_1^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \right) \left(T - \frac{1}{k} \right) + \frac{\delta}{\lambda_2 n} Z_1 \left(T - \frac{1}{k} \right) \\ & + \frac{1}{2n} \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2} \right) Z_1^3 - \frac{1}{k^2 \lambda_2 n} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \right) Z_1 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

である．ただし，$k = k(\theta, \gamma)$,

$$\delta := \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \right) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \gamma}$$

とする．

さて，$\hat{\theta}_{ML^*}$ の 3 次の漸近分布を求めるために

$$P_{\theta,\gamma}\left\{ \sqrt{\lambda_2 n}\left(\hat{\theta}_{ML^*} - \theta \right) \leq t \right\} = P_{\theta,\gamma}\left\{ \hat{U}^* \leq t \right\} = E_{\theta,\gamma}\left[P_{\theta,\gamma}\left\{ \hat{U}^* \leq t \;\middle|\; T \right\} \right] \tag{4.2}$$

とする．いま，(2.1) より，$(X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ の $(n-1)!$ 個の置換の確率置換 $(Y_2, \ldots, Y_n)$ が存在し，$X_{(1)} = x_{(1)}$ が与えられたとき，$Y_2, \ldots, Y_n$ がたがいに独立

に，いずれも密度

$$g(y;\theta,x_{(1)})=\begin{cases}\frac{a(y)e^{\theta u(y)}}{b(\theta,x_{(1)})} & (x_{(1)}\le y<d),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{4.3}$$

をもつ分布に従う確率変数になる (Quesenberry [Q75], [BL84])．ここで，(4.3) は正則な指数型分布族の密度であるから，T を与えたとき $\hat{U}^*$ の条件付分布は Edgeworth 展開可能になる．そこで，定理 4.1 より $\hat{U}^*$ の漸近条件付平均，漸近条件付分散，3 次，4 次の漸近条件付キュムラントを求める．

定理 4.2 定理 4.1 と同じ設定の下で，$\hat{U}^*$ の漸近条件付平均，漸近条件付分散，3 次，4 次の漸近条件付キュムラントは

$$\begin{aligned}
E_{\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)&=-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\mu(\theta,\gamma)+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),\\
V_{\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)&=1+\frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3}-\frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right)+\frac{k\xi^2}{\lambda_2 n}T-\frac{k}{n}\left(T-\frac{1}{k}\right)+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\
&=:1+\frac{1}{n}\tau_T^*(\theta,\gamma)+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \qquad (4.4)\\
\kappa_{3,\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)&=E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\hat{U}^*-E_{\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)\right\}^3\middle|T\right]\\
&=-\frac{2\lambda_3}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\beta_3(\theta,\gamma)+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),\\
\kappa_{4,\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)&=E_{\theta,\gamma}\left[\left\{\hat{U}^*-E_{\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)\right\}^4\middle|T\right]-3\left\{V_{\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)\right\}^2\\
&=\frac{1}{n}\left[\frac{12\lambda_3^2}{\lambda_2^3}-\frac{3\lambda_4}{\lambda_2^2}+\frac{6}{\lambda_2}\left\{2(k\lambda_2+\delta)-2k\xi^2+\frac{4k\xi\lambda_3}{\lambda_2}\right\}\left(T-\frac{1}{k}\right)\right]\\
&\quad+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\
&=:\frac{1}{n}\beta_{4,T}(\theta,\gamma)+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

である．ただし，$\xi=u(\gamma)-\lambda_1$ とする．

注意 4.1 $\hat{U}^*$ の漸近条件付分散と 4 次の漸近条件付キュムラントの $1/n$ の次数の項は T に依存し，漸近条件付平均と 3 次の漸近条件付キュムラントの $1/\sqrt{n}$ の次数の項は U_γ の漸近平均，3 次の漸近キュムラントのそれらと一致する．

定理 4.1，定理 4.2 より $\hat{\theta}^*_{ML}$ の条件付分布の Edgeworth 展開は

$$\begin{aligned}
&P_{\theta,\gamma}\left\{\sqrt{\lambda_2 n}\left(\hat{\theta}_{ML^*}-\theta\right)\le t\middle|\, T\right\}=P_{\theta,\gamma}\left\{\hat{U}^*\le t\middle|\, T\right\}\\
=&\Phi(t)-\frac{\mu}{\sqrt{n}}\phi(t)-\frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(t^2-1)\phi(t)-\frac{\beta_{4,T}}{24n}(t^3-3t)\phi(t)
\end{aligned}$$

$$
-\frac{\beta_3^2}{72n}(t^5-10t^3+15t)\phi(t)-\frac{1}{2n}(\tau_T^*+\mu^2)t\phi(t)
-\frac{\beta_3\mu}{6n}t(t^2-3)\phi(t)+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty) \tag{4.6}
$$

になる．また

$$
E_{\theta,\gamma}(T)=\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad E_{\theta,\gamma}(T^2)=\frac{2}{k^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)
$$

であるから ([A16], [A17])，(3.1), (3.2), (4.4), (4.5) より

$$
\begin{aligned}
E_{\theta,\gamma}(\tau_T^*)&=\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3}-\frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}+\frac{\xi^2}{\lambda_2}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\tau+\frac{\xi^2}{\lambda_2}+O\left(\frac{1}{n}\right),\\
E_{\theta,\gamma}(\beta_{4,T})&=\frac{12\lambda_3^2}{\lambda_2^3}-\frac{3\lambda_4}{\lambda_2^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\beta_4+O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
E_{\theta,\gamma}\left[V_{\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)\right]&=1+\frac{\tau}{n}+\frac{\xi^2}{\lambda_2 n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),\\
E_{\theta,\gamma}\left[\kappa_{4,\theta,\gamma}\left(\hat{U}^*\middle|T\right)\right]&=\frac{\beta_4}{n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

となるから，(4.2), (4.6) より

$$
\begin{aligned}
&P_{\theta,\gamma}\left\{\sqrt{\lambda_2 n}\left(\hat{\theta}_{ML^*}-\theta\right)\le t\right\}\\
=&\Phi(t)-\frac{\mu}{\sqrt{n}}\phi(t)-\frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(t^2-1)\phi(t)-\frac{\beta_4}{24}(t^3-3t)\phi(t)\\
&-\frac{\beta_3^2}{72n}(t^5-10t^3+15t)\phi(t)-\frac{1}{2n}\left(\tau+\frac{\xi^2}{\lambda_2}+\mu^2\right)t\phi(t)\\
&-\frac{\beta_3\mu}{6n}t(t^2-3)\phi(t)+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

となる．ここで，$\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と $\hat{\theta}_{ML^*}$ の分布の Edgeworth 展開 (3.3), (4.7) を比較すると $t\phi(t)$ の係数のみが異なっていることに注意.

5　$\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$, $\hat{\theta}_{ML^*}$ の集中確率による漸近的比較

前節で得られた推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$, $\hat{\theta}_{ML^*}$ の分布の Edgeworth 展開 (3.3), (4.7) から，$\hat{U}_\gamma=\sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}-\theta)$, $\hat{U}^*=\sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML^*}-\theta)$ に留意して，それらの推定量の真の母数 θ の周りでの集中確率の漸近的な差を求めると，任意の非負の数 c_1, c_2 について

$$
\begin{aligned}
&2n\left[P_\theta\left\{-c_1\le\hat{U}_\gamma\le c_2\right\}-P_{\theta,\gamma}\left\{-c_1\le\hat{U}^*\le c_2\right\}\right]\\
&=\frac{\xi^2}{\lambda_2}\{c_2\phi(c_2)+c_1\phi(c_1)\}+o(1)\quad(n\to\infty)
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

となり，また

$$P_\theta\left\{-c_1 \le \hat{U}_\gamma \le c_2\right\} \ge P_{\theta,\gamma}\left\{-c_1 \le \hat{U}^* \le c_2\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$$

となる．従来，$\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ に対する $\hat{\theta}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失が

$$d_n\left(\hat{\theta}_{ML^*}, \hat{\theta}_{ML}^{\gamma}\right) := n\left\{V_{\theta,\gamma}(\hat{U}^*) - V_\theta(U_\gamma)\right\} = \frac{\xi^2}{\lambda_2} + o(1) \quad (n \to \infty)$$

となることは分かっているので ([A16], [A17])，(5.1) から $\hat{\theta}_{ML^*}$ に対する $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ の集中確率の増加量も n^{-1} の次数において ξ^2/λ_2 に比例していることが分かる．ここで，ξ^2/λ_2 は $u(X_1)$ の分散 $\lambda_2 = V_{\theta.\gamma}(u(X_1)) = E_{\theta,\gamma}[\{u(X_1) - \lambda_1\}^2]$ に対する $X_1 = \gamma$ での $u(X_1)$ の値 $u(\gamma)$ から λ_1 までの距離の比として表現されている．よって，集中確率の観点からも γ が未知のときの θ の補正 MLE $\hat{\theta}_{ML^*}$ による推定において，γ の代わりに γ の MLE を用いる影響が ξ^2/λ_2 の比例式で表現される．

6　おわりに

本稿では，片側切断指数型分布族 $\mathcal{P}$ において，γ が下側切断母数の場合に自然母数 θ の MLE について論じたが，θ の MCLE についても同様に論じることができ，また，γ が上側切断母数の場合にも変換によって下側切断母数の場合に帰着できる．さらに，切断パレート分布を含む 2 つの切断母数と自然母数をもつ両側切断指数型分布族の場合にも拡張できる．一方，θ と γ の立場を変えて，θ を局外母数として，γ の推定問題について，漸近分散による 2 次の漸近損失が考えられているが ([A17])，ここでも集中確率の観点から上記と同様に考察できるであろう．

参考文献

[A81] Akahira, M. (1981). On asymptotic deficiency of estimators. *Austral. J. Statist.*, **23**(1), 67–72.

[A16] Akahira, M. (2016). Second order asymptotic comparison of the MLE and MCLE of a natural parameter for a truncated exponential family of distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **68**, 469–490.

[A17] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation For Truncated Exponential Families.* Springer Briefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Springer, Singapore.

[A18] 赤平昌文 (2018). 統計的推測理論の深化と進展のヒストリー．日本統計学会誌, **47**(2), 51–76.

[Ar15] Arnold, B. C. (2015).*Pareto Distributions.* 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.

[BL84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[BN78] Barndorff-Nielsen, O. E. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory.* Wiley, New York.

[BG78] Bhattacharya, R. N. and Ghosh, J. K. (1978). Validity of the formal Edgeworth expansion. *Ann. Statist.*, **6**, 434–451.

[JKB94] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions.* Vol. 1 (2nd ed.), Wiley, New York.

[KS69] Kendall, M. G. and Stuart, A. (1969). *The Advanced Theory of Statistics 1*, 3rd ed., Griffin, London.

[Q75] Quesenberry, C. P. (1975). Transforming samples from truncation parameter distributions to uniformity. *Commun. Statist.*, **4**, 1149–1155.

[VGBB15] Vancak, V., Goldberg, Y., Bar-Lev, S. K. and Boukai, B. (2015). Continuous statistical models: With or without truncation parameters?, *Math. Methods Statist.*, **24**, 55–73.